Programme de Mathématique

Préparation Physique-Chimie &Technologie

Analyse et Géométrie Différentielle

<u>Deuxième Année</u>

I. SUITES ET FONCTIONS

1. Normes et distances, suites
2. Espaces vectoriels normés de dimension finie
3. Séries de nombres réels ou complexes
4. Suites et séries de fonctions
5. Travaux pratiques

II. FONCTIONS D'UNE VARIABLE REELLE : DERIVATION ET INTEGRATION

1. Dérivation des fonctions à valeurs vectorielles
2. Intégration sur un segment d'une fonction à valeurs vectorielles
3. Dérivation et intégration
4. Intégration sur un intervalle quelconque
5. Courbes d'un espace vectoriel normée de dimension finie
6. Travaux pratiques

III. SERIES ENTIERES, SERIES DE FOURIER

1. Séries entières
2. Séries de Fourier
3. Travaux pratiques

IV. EQUATIONS DIFFERENTIELLES

1. Equations différentielles linéaires
2. Travaux pratiques

V. FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES REELLES

1. Calcul différentiel
2. Travaux pratiques

Le programme est organisé autour des concepts fondamentaux de suite (ou de série) et de fonction, qui permettent de modéliser le comportement des phénomènes discrets et des phénomènes continus. Les interactions entre le continu et le discret sont mises en valeur.

Le programme se place dans le cadre des espaces vectoriels normés de dimension finie. Ce cadre permet notamment de décrire et d'étudier les notions de limite et de continuité. Le programme comporte en outre une introduction à la notion de normes en dimension quelconque. Cette notion permet notamment de décrire les modes de convergence usuels des suites et des séries de fonctions. En revanche, l'étude systématique des espaces vectoriels normés n'est pas un objectif du programme.

La maîtrise du calcul différentiel et intégral à une variable et des interventions en géométrie différentielle constitue un objectif essentiel. L'intégration, la représentation des fonctions, notamment par des séries (séries entières, séries de Fourier) et par des intégrales dépendants d'un paramètre, l'approximation des fonctions, les équations différentielles tiennent une place majeure. Le programme comporte en outre une introduction au calcul différentiel à plusieurs variables.

Le programme d'analyse combine l'étude des problèmes qualitatifs avec celle de problèmes quantitatifs. Il développe conjointement l'étude globale des suites de fonctions et l'étude de leur comportement local ou asymptotique ; en particulier, il convient de mettre en valeur le caractère local des notions de limite, de continuité et de dérivabilité.

En analyse, les majorations et les encadrements jouent un rôle essentiel. Tout au long de l'année, il convient donc de dégager les méthodes usuelles d'obtention de majorations et de minorations : opérations sur les inégalités, emploi de la valeur absolue, du module ou d'une norme, emploi du calcul différentiel et intégral. Pour comparer des nombres, des suites ou des fonctions, on utilise systématiquement des inégalités larges (qui sont compatibles avec le passage à la limite), en réservant les inégalités strictes aux cas où elles sont indispensables.

En ce qui concerne l'usage des quantificateurs, il convient d'entraîner les étudiants à savoir les employer pour formuler de façon précise certains énoncés et leurs négations. En revanche, il convient d'éviter tout recours systématique aux quantificateurs. A fortiori leur emploi abusif (notamment sous forme d'abréviations dans un texte) est exclu.

Le programme d'analyse et géométrie différentielle comporte l'analyse et l'emploi d'algorithmes numériques relatifs aux suites et aux fonctions, ainsi que l'emploi du logiciel de calcul symbolique et formel.

I. SUITES ET FONCTIONS

Cette partie est organisée autour de quatre objectifs :

- Etudier les propriétés fondamentales des espaces vectoriels normés de dimension finie, en vue de fournir un cadre cohérent pour l'étude des suites, des séries et des fonctions.
- Etudier le comportement global et asymptotique d'une suite ou d'une fonction.
- Décrire et mettre en œuvre des algorithmes d'approximation d'un nombre à l'aide de suite où de séries et comparer leurs performances. Cette étude est menée en relation avec celle des suites et de l'algèbre linéaire, et avec les problèmes de mesure des grandeurs géométriques ou physiques.
- Exploiter les résultats de la théorie des fonctions, pour l'étude des problèmes numériques (majorations d'expressions, problèmes d'optimisation, solutions d'équations numériques...).

1. Normes et distances, suites

L'objectif est d'introduire les notions de norme sur un espace vectoriel réel ou complexe (de dimension finie ou non) et de suite convergente d'éléments d'un espace vectoriel normé.

Définition d'une norme, notée $x \to \|x\|$ ou $x \to N(x)$, sur un espace vectoriel ***E*** réel ou complexe ; distance associée notée. Boules. Parties bornées.	Ces notions doivent être illustrées par de nombreux exemples issus de l'espace $\mathbf{K}^n$, des espaces de matrices et de fonctions. Les étudiants doivent connaître notamment les normes N_1, N_2 et N_∞ sur $\mathbf{K}^n$ et sur l'espace vectoriel $C([a,b])$ des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs

Norme $x \to \|x\| = \sqrt{(x\|x)}$ associée à un produit scalaire $(x, y) \to (x\|y)$sur un espace vectoriel ***E*** réel ou complexe. Suites convergentes, suites divergentes, opérations algébriques sur les suites convergentes. Définition d'une application *k*-lipschitzienne. Composée d'applications *k*-lipschitziennes. Comparaison de deux normes *N* et *N'* sur ***E*** : pour que toute suite convergent vers 0 au sens de *N* converge vers 0 au sens de *N'*, il faut et il suffit qu'il existe un nombre réel α > 0 tel que $N' \leq \alpha N$. Normes équivalentes.	réelles ou complexes. L'application $x \to \|x\|$est 1-lipschitzienne. Les étudiants doivent savoir comparer notamment les normes usuelles mentionnées ci dessus.

2. Espaces vectoriels normés de dimension finie

L'objectif de ce chapitre est double :

- Etudier les propriétés fondamentales des espaces vectoriels normés de dimension finie (équivalence des normes, critère de Cauchy de convergence des suites et des séries).
- Etudier le comportement local et asymptotique d'une fonction grâce aux concepts de limite et de continuité.

L'équivalence des normes montre que de nombreux concepts importants sont indépendants du choix d'une norme : parties bornées, applications bornées, applications lipschitziennes ; parties ouvertes, parties fermées, limite et continuité d'une application, continuité uniforme ; suites convergentes, parties compactes, suites de Cauchy. Par conséquent, pour toutes ces notions, il est légitime de se placer dans le cadre des espaces dimension finie (sans préciser une norme particulière).

En ce qui concerne le comportement global et asymptotique d'une suite, il convient de combiner l'étude des problèmes qualitatifs (monotonie, convergence, divergence…) avec celle des problèmes quantitatifs (majorations, encadrements, vitesse de convergence ou de divergence par comparaison aux suites de référence usuelles, accélération de convergence…).

De même, en ce qui concerne le comportement global et local (ou asymptotique) d'une fonction, il convient de combiner l'étude des problèmes qualitatifs (monotonie, existence de zéros, existence d'extremums, existence de limites, continuité, dérivabilité…) avec celle des problèmes quantitatifs (majorations, encadrements, comparaison aux fonctions de référence au voisinage d'un point…).

Les applications étudiées dans ce chapitre sont définies sur une partie *A* d'un espace vectoriel normé ***E*** de dimension finie sur **R** ou **C** et à valeurs dans un autre *F*.

Dans un souci d'unification, une propriété portant sur une fonction *f* est dite vraie au voisinage d'un point *a* si elle est vraie sur l'intersection de *A* avec une boule de centre *a* lorsque *a* est un point de ***E*** adhérent à *A*, avec un intervalle]c,+∞ [lorsque ***E*** =**R** et $a = +\infty$, avec un intervalle]-∞ ,c[lorsque ***E*** =**R** et $a = -\infty$.

Suite d'élément d'un espace vectoriel de dimension finie

Sur un espace vectoriel *E* de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Définition d'une partie bornée, d'une application bornée. Pour qu'une suite (u_n) d'élément d'un espace vectoriel normé *E* de dimension finie soit convergente, il faut et il suffit que ses coordonnées dans une base de ***E*** soient convergentes. Définition d'une suite de Cauchy. Toute suite de Cauchy de nombres réels ou complexes est convergente ; plus généralement toute suite de Cauchy d'éléments de ***E*** est convergente. Relations de comparaisons entre suites : domination et négligeabilité pour une suite (u_n) à valeurs vectorielles et une suite (α_n) à valeurs réelles. Equivalence pour deux suites (u_n) et (v_n) à valeurs réelles ou complexes.	La démonstration de ce théorème est hors programme. Espace vectoriel normée $B(A,F)$ des applications bornées *f* de *A* dans ***F***. Les coordonnées des limites sont alors les limites des coordonnées. La démonstration de ce théorème n'est pas exigible des étudiants. Notations $u_n = O(\alpha_n)$, $u_n = o(\alpha_n)$, $u_n \sim v_n$.

Etude locale d'une application, continuité

Définitions des parties ouvertes, des parties fermées. Réunion et intersections de parties ouvertes, de parties fermées. Définition d'un point adhérent à une partie, d'un oint intérieur à une partie. Caractérisation séquentielle des points adhérents, des parties fermées Limite d'une application : Soit *f* une application d'une partie *A* de *E* à valeurs dans *F* et *a* un point de *E* adhérent	Les notions de voisinage d'un point, d'adhérence, d'intérieur et de frontière d'une partie, d'ouverts et de fermés relatifs à une partie sont hors programme. Aucune autre connaissance spécifique sur ces notions n'est exigible des étudiants et tout excès de technicité est exclu. La notion de point d'accumulation est hors programme. Lorsque *a* appartient à *A*, *f* est dite continue au point *a* : alors *b = f(a)*. Dans le cas contraire *f* admet une limite en

à *A*. Etant donné un élément *b* de *F*, on dit que *f* admet *b* comme limite en *a* si, pour tout nombre réel $\varepsilon>0$ il existe un nombre réel $\delta>0$ tel que, pour tout élément *x* de *A*, la relation $\lVert x-a\rVert \leq \delta$ implique la relation $\lVert f(x)-b\rVert \leq \varepsilon$; le vecteur *b* est alors unique, et on le note $b = \lim\limits_{a} f$, ou encore $b = \lim\limits_{x\to a} f(x)$. Lorsqu'un tel *b* existe, on dit que *f* admet une limite au point *a*.	*a* si et seulement si *f* se prolonge par continuité en ce point. Dans le cas des fonctions d'une variable réelle, extension de la notion de limite lorsque $a=+\infty$ ou $a=-\infty$. Dans le cas des fonctions à valeurs réelles, extension de la notion de limite lorsque $b=+\infty$ ou $b=-\infty$.
Limite d'une application composée ; opérations algébriques sur les limites.	Caractérisation d'une application admettant une limite à l'aide de ses coordonnées dans une base de *F*.
Limite de l'image d'une suite admettant une limite a par une application admettant une limite au point *a*.	
Relations de comparaison en un point ; domination et négligeabilité pour une fonction *f* à valeurs vectorielles et une fonction φ à valeurs réelles ne s'annulant pas en dehors du point.	Caractérisation séquentielle de l'existence d'une limite et de la continuité d'une application en un point.
Applications continues. Continuité de la composé de deux applications continues, de la restriction d'une application continue ; opérations algébriques sur les applications continues. Caractérisations de la continuité à l'aide des coordonnées dans une base de ***F***.	Notation $f=O(\varphi)$ et $f=O(\varphi)$.
Image réciproque d'une partie ouverte, d'une partie fermée par une fonction *f* continue sur *E* à valeurs réelles ou complexes. En particulier, si *f* est à valeurs réelles, alors l'ensemble des points *x* tels que $f(x)\geq\alpha$, ou tels que $f(x)=\alpha$, est une partie fermée de ***E*** ; de même l'ensemble des points *x* tels que $f(x) > \alpha$, est une partie ouverte de ***E***.	Espace vectoriel *C(A, F)* des applications continues de *A* dans ***F***, algèbre *C(A)* des fonctions à valeurs réelles ou complexes continues sur *A*. Il convient de souligner l'intérêt de ces résultats pour montrer qu'une partie est ouverte (ou fermée).
Définition d'une partie compacte de ***E*** : partie fermée bornée de ***E***.	La caractérisation de la continuité par images réciproque des ouverts (de fermés) est hors programme.
Etant donnée une application continue *f* de *A* dans ***F***, l'image par *f* d'une partie compacte de ***E*** incluse dans ***A*** est une partie compacte de ***F***. Cas d'une fonction numérique continue sur un compact : existence d'extremums.	

Continuité des applications linéaires

Toute application linéaire *u* d'un espace vectoriel normé ***(E**, N)* de dimension finie dans un autre ***(F**, N')* est continue sur ***E***. Si ***E, F*** et ***G*** sont de dimension finie, toute application bilinéaire *B* de $E\times F$ dans *G* est continue sur $E\times F$. Continuité de l'application $(\lambda, x) \to \lambda x$ de $K\times E$ dans ***E***, du produit scalaire sur un espace euclidien.	Il existe un nombre réel *k* > 0 tel que, pour tout *x*, $N'(u(x)) \leq k\, N(x)$ dans ces conditions *u* est k-lipschitzienne. Il convient de mettre en valeur des inégalités du type $\| B(x, y) \| \leq k \| x \| \| y \|$. Continuité de $(u, v) \to uv$ dans l'algèbre *L(**E**)*.

1. Séries de nombres réels ou complexes

L'objectif de ce chapitre est double :

- **Etudier la convergence des séries de nombres réels positifs.**
- **Etudier les séries absolument convergentes de nombres réels ou complexes, à partir des résultats obtenus pour les nombres réels positifs.**

a. Suites et séries

Série $\sum u_n$ associée à une suite $(u_n)_n$ de nombres réels ou complexes, suite des sommes partielles de cette série. **Définition d'une suite convergente et de sa somme notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Espace vectoriel des séries convergentes.** **Caractérisation de la convergence d'une série de**	**Il convient de mettre en valeur et d'exploiter la correspondance bijective entre suites et séries.** **Si la série $\sum u_n$ est convergente alors la suite $(u_n)_n$ converge vers 0. La réciproque est fausse.**

nombres complexes à l'aide de parties réelle et imaginaire. **Critère de Cauchy pour la convergence d'une série de nombres réels ou complexes.** **Convergence d'une série alternée dont la valeur absolue du terme général tend vers 0 en décroissant ; majoration du reste.**	**Aucune autre connaissance spécifique sur les séries semi-convergentes n'est exigible des étudiants.**

Séries de nombres réels positifs

Pour qu'une série $\sum u_n$ **de nombres réels positif converge, il faut et il suffit que la suite** $(s_n)_n$ **de ses sommes partielles soit majorée.** **Théorème de comparaison des séries de nombres réels positifs : soient** $(u_n)_n$ **et** $(\alpha_n)_n$ **deux suites de nombres réels positifs telles que** $u_n = O(\alpha_n)$ **; alors la convergence de la série** $\sum \alpha_n$ **implique la convergence de la série** $\sum u_n$**.**	**Convergence des séries géométriques de nombres réels positifs, convergence des séries de Riemann.** **Alors** $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} s_n = \sup_n s_n$**.** **Comparaison de série de nombres réels positifs à une série géométrique, à une série de Riemann. Règle de d'Alembert.** **Développement décimal d'un nombre réel positif.**

Séries de nombres réels ou complexes

Séries absolument convergentes (c'est à dire telles que $\sum \lvert u_n \rvert < +\infty$**).** **Toute série absolument convergente est convergente.** **Série géométrique : La série, où** z **appartient à** C**, est absolument convergente si et seulement si**	**En outre** $\left\lvert \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right\rvert \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \lvert u_n \rvert$**.** **En outre si** $\lvert z \rvert \geq 1$**, cette série est divergente.**

|z| < 1 ; sa somme est alors égale à $\frac{1}{1-z}$. **Série exponentielle : pour tout nombre complexe z .** **la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente.**	**Par définition exp$z$ = $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.**

Produit de deux séries absolument convergentes

Définition du produit de Cauchy $\sum w_n$ de deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ de nombres complexes . **Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes alors la série $\sum w_n$ l'est aussi et on a :** $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$	$w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q$ **La démonstration de ce résultat n'est pas exigible des étudiants.**

1. Suites et séries de fonctions

L'objectif de ce chapitre est de définir les modes usuelles de convergence ponctuelle des suites et séries de fonctions (convergence simple, convergence uniforme, convergence uniforme sur tout compact, convergence normale d'une série de fonctions) et d'exploiter ces types de convergence pour étudier la stabilité des propriétés des fonctions par passage à la limite et l'approximation d'une fonction par des fonctions plus simples.

Il convient de souligner que, le plus souvent, la convergence simple ne suffit pas pour assurer la régularité de la limite d'une suite de fonctions. En revanche, l'étude systématique des différents modes de convergence des suites et des séries de fonctions n'est pas un objectif du programme.

Dans ce chapitre, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle *I* de R **à valeurs réelles ou complexes.**

a. **Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale**

Etant donné une suite $(f_n)_n$ de fonctions définies sur *I*, définitions de la convergence simple sur *I*, de la convergence uniforme sur *I*, de la convergence uniforme sur tout segment de *I*. **Définitions correspondantes pour une série de fonctions.** **Soit *a* un point de *A* ; si $(f_n)_n$ converge uniformément vers *f* sur *A*, et si, pour tout *n*, f_n est continue en *a*, alors *f* l'est aussi.** **Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers *f* sur tout segment de *I* et si, pour tout *n*, f_n est continue sur *I*, alors *f* l'est aussi.** **Continuité de la somme d'une série de fonctions continues uniformément convergente sur tout segment de *I*.** **Une série $\sum f_n$ de fonctions réelles ou complexes est dite normalement convergente sur *I*, si la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ est convergente. Convergence normale sur tout segment de *I*.** **Toute série de fonctions normalement convergente sur *I* est absolument et uniformément convergente sur *I*.**	**Pour la convergence uniforme, le programme se limite aux fonctions bornées ; cette convergence est définie à partir de la norme N_∞ sur l'espace *B(I)* des fonctions à valeurs complexes bornées sur *I*.** **Extension de ce résultat au cas où *a* est une extrémité de *I* lorsque, pour tout *n*, f_n admet une limite b_n en *a*.** **Pour établir la convergence normale de $\sum f_n$, il convient d'utiliser une série numérique convergente $\sum \alpha_n$ majorante. C'est à dire que, pour tout *n*, $\|f_n\|_\infty \le \alpha_n$.** **Alors, $N_\infty\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) \le \sum_{n=0}^{+\infty} N_\infty(f_n)$.**

b.
c.
d.
e.

f. **Approximation des fonctions d'une variable**

Définition d'une fonction φ à valeurs dans ***F*** en escalier sur [*a*,*b*], d'une subdivision de [*a*,*b*] subordonnée à φ. Espace vectoriel des fonctions en escalier sur un segment.	Espace vectoriel des fonctions en escalier sur **R** (par définition, ces fonctions sont nulles en dehors d'un segment).
Définition d'une fonction φ à valeurs dans ***F*** continue par morceaux sur [*a*,*b*], d'une subdivision de [*a*,*b*] subordonnée à φ. Espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur un segment.	Une fonction est dite continue par morceaux sur un intervalle *I* de **R** si sa restriction à tout segment est continue par morceaux.
Approximation uniforme sur [*a*,*b*] des fonctions continues par morceaux sur [*a*,*b*] par des fonctions en escalier sur [*a*,*b*].	
Approximation uniforme sur [*a*,*b*] des fonctions continues sur [*a*,*b*] par des fonctions polynomiales. Approximation uniforme sur **R** des fonctions à valeurs complexes continues périodique par des polynômes trigonométriques (complexes).	La démonstration des théorèmes de Weierstrass est hors programme.

1. **Travaux pratiques**

Exemples d'obtention de majoration et de minoration d'expressions réelles ou du module d'expressions complexes ; exemples d'emploi pour l'étude des suites et des fonctions. $ Exemples d'études du comportement global et asymptotique de suites de nombres réels, de nombres complexes. $ Exemples d'étude de suites de nombres réels définies par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$ et d'emploi d'une telle suite pour l'approximation d'un point fixe *a* de *f.* Exemples de méthodes d'accélération de convergence. Exemples d'espaces vectoriels normés de suites et de fonctions ; exemples d'applications linéaires continues ou	Il convient d'entraîner les étudiants à exploiter la comparaison aux suites de référence et à classer des ordres de grandeurs.

discontinues. Exemples de comparaison de normes. $ Exemples d'étude de séries de nombres réels ou complexes. $ Exemples d'obtention et d'emploi d'approximations uniformes de fonctions d'une variable réelle.	Pour étudier la vitesse de convergence de u_n vers *a*, les étudiants doivent savoir exploiter le comportement local de *f* au voisinage de *a* et notamment, une inégalité du type lipschitzien $\lvert f(x)-f(a)\rvert \leq k\lvert x-a\rvert$ où $0 \leq k < 1$ ou du type $\lvert f(x)-f(a)\rvert \leq \lambda\lvert x-a\rvert^2$. Cas des espaces normés d'applications linéaires ou de matrices.

I. FONCTIONS D'UNE VARIABLE REELLE : DERIVATION ET INTEGRATION

Le programme est organisé autour de quatre objectifs :

- Consolider les acquis de première année concernant la dérivation et l'intégration des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes.
- Etendre ces résultats au cas des fonctions d'une variable réelle à valeurs vectorielles.
- Etudier l'intégration et la dérivation des suites et séries de fonctions à valeurs vectorielles.
- Effectuer une étude élémentaire des fonctions définies par des intégrales dépendant d'un paramètre.

Aussi bien pour l'étude locale que pour l'étude globale des fonctions, le programme combine de manière indissociable les outils du calcul différentiel et du calcul intégral.

1. Dérivation des fonctions à valeurs vectorielles

L'objectif de ce chapitre est double :

- Consolider les acquis de première année concernant la dérivation des fonctions à valeurs réelles ou complexes : dérivation en un point, propriétés globales des fonctions de classe C^k, fonctions convexes.
- Etudier la dérivation des fonctions à valeurs vectorielles.
- Les fonctions étudiées dans ce chapitre sont définies sur un intervalle *I* de **R** et à valeurs dans un espace vectoriel ***F*** de dimension finie sur **R** ou sur **C**.

a. **Dérivée en un point, fonctions de classe C^1**

Dérivabilité en un point : dérivée, dérivée à gauche, dérivée à droite. Dérivabilité sur un intervalle application dérivée, application de classe C^1. Opérations sur les applications de classe C^1 : Linéarité de la dérivation, dérivée d'une application de la forme $u(f)$ où *u* est une application linéaire, dérivée d'une application de la forme $B(f,g)$ où *B* est une application bilinéaire. Caractérisation de la dérivabilité d'une fonction *f* à valeurs dans ***F*** à l'aide d'une base de ***F***. Cas d'une fonction *f* à valeurs complexes : pour que *f* soit de classe C^1, il faut et il suffit que $\overline{f}$ le soit, ou encore que $Re(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le soient. Caractérisation des fonctions constantes parmi les fonctions continues sur *I* et dérivables sur l'intérieur de *I*.	Les étudiants doivent connaître et savoir exploiter l'interprétation graphique et cinématique de la notion de dérivée en un point. Notations *f'*, *Df*, $\frac{df}{dx}$. Lorsque ***F*** est un espace préhilbertien, dérivation de $(f\|g$ de $\\|f\\|_2$; lorsque e est un vecteur unitaire, orthogonalité d et *D*e. Les coordonnées de *Df* sont les dérivées des coordonnées *f*. Dans ces conditions $D(\overline{f}) = \overline{Df}$, $Df = D(Ref) + iD(\mathrm{Im}\, f)$.

b.

c. **Fonctions de classe C^k**

Définition d'une fonction de classe C^k sur I (*k* entier naturel ou $k = +\infty$). **Espace vectoriel C^k (*I*,*F*) des applications de classe C^k sur *I* à valeurs dans *F*. Algèbre C^k (*I*) des applications de classe C^k sur *I* à valeurs réelles ou complexes.** **La composée $f \circ \varphi$ d'une fonction *f* de classe C^k sur *I* et d'une fonction φ de classe C^k sur *J* à valeurs dans *I* est de classe C^k sur *J*.** **Définition d'un C^k - difféomorphisme de *J* sur *I* $(k \geq 1)$.**	**Notations $f^{(k)}$, $D^k f$, et $\frac{d^k f}{dx^k}$.** **Dérivée $k^{ème}$ du produit de deux fonctions (formule de Leibniz).**

	Une fonction de classe C^k sur *J*, $(k \geq 1)$ est un C^k-difféomorphisme de *J* sur *I* = φ *(I)* si et seulement si, pour tout élément *t* de *J*, $\varphi'(t) \neq 0$.

d.

e. **Fonctions de classe C^k**

par morceaux

Une fonction *f* est dite de classe C^k par morceaux sur un segment [*a, b*], où, s'il existe une subdivision $(a_0, \dots a_n)$ de [*a, b*] telle que la restriction de *f* à chacun des intervalles]a_i, a_{i+1}[soit prolongeable en une fonction de classe C^k sur [a_i, a_{i+1}] ; les dérivées successives de *f* sont définies sur $[a, b]$ privé d'une partie finie ; elles sont notées D^k*f.* **Si *f* est continue sur *I* et de classe C^1 par morceaux sur *I, f* est constante si et seulement si D*f* = 0.**	**Une fonction *f* est dite de classe C^k par morceaux sur un intervalle quelconque *I* si sa restriction à tout segment est de classe C^k par morceaux.** **Il convient de mettre en valeur le cas usuel des fonctions de classe C^k et de classe C^{k-1} par morceaux.**

1. Intégration sur un segment d'une fonction à valeurs vectorielles

L'objectif de ce chapitre est triple :

- Consolider les acquis de première année concernant l'intégration des fonctions à valeurs réelles ou complexes.
- Etendre la notion d'intégrale aux fonctions à valeurs vectorielles continues par morceaux sur un segment.
- Etudier l'intégration sur un segment des suites et séries de fonctions continues ; introduire les convergences en moyenne et en moyenne quadratique et les comparer à la convergence uniforme.

Le programme se limite à l'intégration des fonctions continues par morceaux sur un segment $J = [a,b]$ à valeurs dans un espace vectoriel ***F*** de dimension finie sur **R** ou **C**. La notion de fonction intégrable au sens de Riemann est hors programme.

a. **Intégrale d'une fonction continue par morceaux**

Définition de l'intégrale d'une application φ en escalier sur un segment *J*. Notation, $\int_{[a,b]} \varphi$. Linéarité de l'intégrale. Image de l'intégrale par une application linéaire. Définition de l'intégrale d'une application *f* continue par morceaux sur un segment *J*. Notations $\int_J f$ et $\int_{[a,b]} f$. Linéarité de l'intégrale. Invariance de l'intégrale par translation. Pour les fonctions réelles positivité et croissance de l'intégrale. Image de l'intégrale par une application linéaire. Expression de l'intégrale à l'aide d'une base de ***F.*** Les intégrales de deux fonctions continues par morceaux coïncidant sur *J* sauf sur une partie finie sont égales. Si *K* est un segment contenu dans *J*, $\int_K f = \int_J \chi_K f$ où χ_K est la fonction caractéristique de *K*. Valeur moyenne d'une fonction. Inégalité de la moyenne $\left\Vert \int_{[a,b]} f \right\Vert \leq \int_{[a,b]} \Vert f \Vert \leq (b-a) \sup_{[a,b]} \Vert f \Vert$. Etant donnée une application *f* continue par morceaux sur un intervalle *I* de **R**, définition de $\int_a^b f(t)dt$ où *a* et *b* appartiennent à *I*..	Inégalité $\left\Vert \int_J \varphi \right\Vert \leq \int_J \Vert \varphi \Vert$ Inégalité $\left\Vert \int_J f \right\Vert \leq \int_J \Vert f \Vert$ Une fonction continue et à valeurs positives sur un segment sur $[a,b]$ est nulle si et seulement si son intégrale est nulle. Pour une fonction à valeurs complexes, intégrale de $\overline{f}$, de $\mathrm{Re}(f)$, de $\mathrm{Im}(f)$. Définition de l'intégrale d'une fonction d'une fonction *f* définie sur un segment $[a,b]$ privé d'une subdivision $S = (a_0, \ldots a_n)$ de, lorsque la restriction de *f* à chacun des intervalles $]a_i, a_{i+1}[$ est prolongeable en une fonction continue sur $[a_i, a_{i+1}]$. Additivité de l'intégrale par rapport à l'intervalle d'intégration. Les étudiants doivent savoir effectuer des majorations analogues pour les intégrales de la forme, $\int_{[a,b]} B(f,g)$ où *B* est une application bilinéaire. Linéarité. Inégalité de la moyenne. Relation de Chasle.

b.
c. **Intégration sur un segment des suites de fonctions continues**

Norme de la convergence en moyenne sur l'espace vectoriel $C([a,b],F)$ des applications continue de $[a,b]$ dans F. La convergence uniforme de $(f_n)_n$ sur $[a,b]$ implique la convergence en moyenne et, en outre, $$\int_{[a,b]} \lim_n f_n = \lim_n \int_{[a,b]} f_n$$	$N_1(f) = \int_{[a,b]} \|f\|$. Inégalité $$\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \leq N_1(f) \leq (b-a) \|f\|_\infty$$
Intégration terme à terme d'une série d'applications continues : soit $(f_n)_n$ une suite d'applications continues sur $[a,b]$. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$, la série des intégrales est convergente et $$\int_{[a,b]} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{[a,b]} f_n$$	Lorsque la convergence est normale sur $[a,b]$, la série $\sum N_1(f_n)$ est convergente et $$N_1\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) \leq \sum_{=0}^{+\infty} N_1(f_n)$$
Produit scalaire $(f\|g) = \int_{[a,b]} f\overline{g}$ sur l'espace vectoriel $C([a,b])$ des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs complexes ; inégalité de Cauchy-Schwarz. Norme de la convergence en moyenne quadratique $$N_2(f) = \sqrt{\int_{[a,b]} \|f\|^2}.$$ La convergence uniforme implique la convergence en moyenne quadratique, qui implique elle-même la convergence en moyenne.	Inégalités $$N_2(f) \leq \sqrt{b-a}\, N_\infty(f)$$ $$N_1(f) \leq \sqrt{b-a}\, N_2(f)$$

1. Dérivation et intégration

L'objectif de ce chapitre est triple :

- **Etendre aux fonctions vectorielles le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, et exploiter ce théorème pour l'étude globale des fonctions de classe C^1 (théorème des accroissements finis) et pour les fonctions de classe C^k (formules de Taylor).**
- **Etudier la primativation des suites et séries de fonction et appliquer les résultats obtenus pour leur dérivation.**
- **Effectuer une étude élémentaire des fonctions définies par des intégrales dépendant d'un paramètre.**

Les fonctions étudiées dans ce chapitre sont définies sur un intervalle *I* de R **et à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie** *F* **sur** R **ou sur** C.

a. Primitives et intégrale d'une fonction continue

Définition d'une primitive *g* d'une application *f* continue sur *I*. **Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.** **Théorème fondamental : étant donnée une application *f* continue sur *I* et un point *a* de *I*,** • **L'application** $x \to \int_a^x f(t)dt$ **est l'unique primitive de *f* sur *I* qui s'annule en *a*.** **pour toute primitive *h* de *f* sur *I*,** $\int_a^x f(t)dt = h(x) - h(a)$. • **Pour toute application *f* de classe** C^1 **sur *I*,**	**Extension de cette définition au cas où *f* est continue par morceaux sur *I* : *g* est continue sur *I* et de** C^1 **par morceaux sur *I* et, en tout point de continuité de *f*, *g*'(*x*) = *f*(*x*).** **Extension au cas où *f* est continue par morceaux sur *I*.** **Extension au cas où *f* est continue sur *I* et de classe** C^1 **par morceaux sur *I*.** **Extension aux fonctions continues sur *I* et de classe** C^1 **par morceaux sur *I*.** **Il convient de mettre en valeurs l'intérêt de changements de variables affines, notamment pour**

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)dt$$ **Formule d'intégration par parties pour des fonctions de C^1 sur *I*.** **Changement de variable : étant donnée une fonction *f* continue sur *I* à valeurs dans *F* et une fonction φ à valeurs dans *I* et de classe C^1 sur $[\alpha,\beta]$,** $$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt=\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du$$. **Extension au cas où *f* est continue par morceaux sur *I*, lorsque φ est strictement monotone sur $[\alpha,\beta]$.**	**exploiter la périodicité et les symétries, ou pour se ramener, par paramétrage du segment $[a,b]$, au cas où l'intervalle d'intégration est $[0,1]$ ou $[-1,1]$.**

a. **Etude globale des fonctions de classe C^1**

Inégalité des accroissements finis : soit *f* une application continue sur $[a,b]$ et de classe C^1 sur $]a,b[$. Si, pour tout élément $t\in\,]a,b[$, $\lVert f'(t)\rVert\le\lambda$, alors $$\lVert f(b)-f(a)\rVert\le\lambda(b-a)$$ **Si *f* est continue sur $[a,b]$, de classe C^1 sur $]a,b]$ et si *f'* admet une limite dans *F* en *a*, alors *f* est de classe C^1 sur $[a,b]$.**	**Les étudiants doivent connaître l'interprétation cinématique de ce résultat.** **Extension au cas où *f* est continue sur *I* et de classe C^1 par morceaux sur $[a,b]$.** **Extension aux applications de classe C^k : si *f* est continue sur $[a,b]$, de classe C^k sur $]a,b]$ et si, pour tout $r\in[1,k]$, $D^r f$ admet une limite dans *F* en *a*, alors *f* est de classe C^k sur $[a,b]$.**

Formules de Taylor

Pour une fonction *f* de C^k sur *I* et de classe C^{k+1} par morceaux sur *I*, formule de Taylor à l'ordre *k* en un point *a* de *I :* expression intégrale du reste R_k . Majoration du reste R_k (inégalité de Taylor-Lagrange	**Décomposition $f(x)=T_k(x)+R_k(x)$, où** $$T_k(x)=\sum_{n=0}^{k}\frac{(x-a)^n}{n!}D^n f(a)$$.

) **Développement limité d'une primitive d'une application continue ; application au développement limité de la dérivée d'une application de classe C^1.**	**Existence d'un développement limité à l'ordre *k* pour une application de classe C^k : formule de Taylor-Young.**

Suites et séries de fonctions de classe C^k

Primativation de la limite d'une suite de fonctions : soit *a* un point de *I*, $(f_n)_n$ une suite d'applications continues sur *I* à valeurs dans *F* et, pour tout *n*, h_n la primitive de f_n sur *I* qui s'annule en *a*. Si $(f_n)_n$ converge vers *f* uniformément sur tout segment de *I*, alors $(h_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de *I* vers la primitive de *f* sur *I* qui s'annule en *a*. **Application aux séries de fonctions continues.**	**Il convient de mettre en valeur le fait que, pour tout segment [a, b] de *I*, pour toute application *f* continue par morceaux sur *I* et toute primitive *h* de *f*,** $N_\infty(h) \leq \Vert h(a) \Vert + \int_{[a,b]} \Vert f \Vert$.
Dérivation de la limite d'une suite de fonctions : soit $(f_n)_n$ une suite d'applications de classe C^1 sur *I* convergeant simplement vers *f* sur et telle que $(f'_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de *I* vers *h*, alors *f* est de classe C^1 sur *I* et $f' = h$.	**Il convient de mettre en valeur le fait que, pour tout segment [a, b] de *I*, pour toute application *f* de classe C^1 sur *I* et toute primitive *h* de *f*,** $N_\infty(f) \leq \Vert f(a) \Vert + \int_{[a,b]} \Vert f' \Vert$.
Extension aux applications de classe C^k. **Dérivation terme à terme d'une série de fonctions : soit $(f_n)_n$ une suite d'applications de classe C^1 sur *I* à valeurs dans *F*. Si la série $\sum f_n$ converge simplement sur *I*, et si la série $\sum f'_n$ converge uniformément sur tout segment de *I*, alors la somme de la série $\sum f_n$ est de classe C^1 sur *I* et $D\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} Df_n$** **l'application $e_z : t \to \exp(tz)$, où *z* est un nombre**	**Extension aux fonctions de classe C^k.**

complexe, est de classe C^{∞} sur R et $$De_z = ue_z = e_z u$$	

Intégrales dépendant d'un paramètre

La démonstration des résultats de ce paragraphe sont hors programme.

Continuité sous le signe $\int$: soit *f* une application continue sur *A* $\times$ [a, b], où *A* est un intervalle de R. Alors l'application *g* définie par la relation $g(x) = \int_a^b f(x,t)dt$ **est continue sur *A*.** **Dérivation sous le signe $\int$ (formule de Leibniz) : lorsque *f* est continue sur *A* $\times$ [a, b] et admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue sur *A* $\times$ [a, b], alors *g* est de classe C^1 sur *A* et** $g'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$ **.** **Intégration sous le signe $\int$ (formule de Fubini) : lorsque *A* est un intervalle de *R* et que *f* est continue sur *A* $\times$ [a, b], pour tout segment [c, d] inclus dans *A*** $$\int_a^b (\int_c^d f(x,t)dx)dt = \int_c^d (\int_a^b f(x,t)dt)dx .$$	**Extension aux fonctions de classe C^k .**

1. Intégration sur un intervalle quelconque

Ce chapitre est organisé autour de quatre objectifs :

- **Etudier l'intégrabilité d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle, d'abord dans le cas des fonctions positives, puis dans le cas des fonctions à valeurs réelles ou complexes.**
- **Etudier les suites et séries de fonctions intégrables, garce aux théorèmes de convergence monotone et de convergence dominée qui constituent des outils puissants.**
- **Appliquer les résultats obtenus à l'étude des fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre.**
- **Exploiter la représentation des fonctions par des séries et des intégrales, en relation avec les autres disciplines scientifiques.**

Le programme se limite à l'intégration des fonctions continue par morceaux sur un intervalle *I* de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles ou complexes. La notion de fonction de fonction intégrable au sens de Lebesgue est hors programme.

a. Fonctions intégrables à valeurs positives

Une fonction continue par morceaux et positive *f* est dite intégrable (ou sommable) sur un intervalle *I* s'il existe un nombre réel positif *M* tel que, pour tout segment *J* contenu dans *I*, $\int_J f \leq M$. On pose alors $$\int_I f = \sup_J \int_J f$$ **Si *f* est continue par morceaux sur [*a*,*b*], *f* est intégrable sur *[a, b]* et son intégrale définie dans ce paragraphe coïncide avec l'intégrale définie au chapitre 2.** **Opérations sur les fonctions continues par morceaux, intégrables et positive : somme, produit par un scalaire positif. Croissance : si *f* et *g* sont continues par morceaux sur *I*, si $0 \leq f \leq g$ et si *g* est intégrable sur *I*, *f* l'est aussi et $\int_I f \leq \int_I g$.** **Si *a* appartient à *I*, *f* est intégrable sur *I* si et seulement si elle est intégrable sur $I \cap]-\infty, a]$ et sur $I \cap [a,+\infty[$** **Caractérisation de l'intégrabilité de *f* sur *[a, b[* à l'aide de la fonction $x \to \int_a^x f(t)dt$.**	**S'il existe une suite croissante $(J_n)_n$ de segments dont la réunion est égale à *I* et telle que, pour tout *n*, $\int_{J_n} f \leq M$, alors *f* est intégrable sur *I*. Dans ces conditions, pour toute suite $(J_n)_n$ de ce type :** $\int_I f = \sup_n \int_{J_n} f_n = \lim_n \int_{J_n} f_n$ **En outre, elle est intégrable sur]*a*,*b*],]*a*,*b*[et [*a*,*b*[et les quatre intégrales sont égales.** **Une fonction continue, positive et intégrable sur *I* est nulle sur *I* si et seulement si son intégrale est nulle.** **Additive de l'intégrale.** **Cas des fonctions définies sur]*a*,*b*]. Intégrabilité de $t \to t^\alpha$ sur *[a,*+∞ *[*, sur]*0*,*a*].**

Fonctions intégrables à valeurs complexes

Une fonction *f* continue par morceaux sur *I* à valeurs réelles ou complexes est dite intégrable (ou sommable) sur *I* si $\lvert f \rvert$ l'est. Définition de $\int_I f$: pour toute suite croissante $(J_n)_n$ de segments dont la réunion est égale à *I* , $\int_I f = \lim_n \int_{J_n} f$ **Si *f* et φ sont continues par morceaux, si $\lvert f \rvert \leq \varphi$ et si φ est intégrable sur *I,* alors *f* est intégrable sur *I.*** **Espace vectoriel des fonctions continue par morceaux et intégrables sur *I.* Linéarité de l'intégrale.** **Une fonction *f* à valeurs réelle continue par morceaux sur est intégrable sur *I* si et seulement si f^+ et f^- le sont ; alors** $\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-$, $\int_I \lvert f \rvert = \int_I f^+ + \int_I f^-$ **Si *I'* est contenu dans *I* et si *f* est intégrable sur *I* alors *f* est intégrable sur *I'* et $\int_{I'} f = \int_I \chi_{I'} f$.** **Définition de $\int_a^b f(t)dt$, où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, lorsque *f* est intégrable sur]a,b[. Cas où *b* < *a.* Relation de Chasles.** **Emploi de relations de comparaison pour l'étude de l'intégrabilité.** **Etant donnée une fonction *f* à valeurs réelles ou complexes continue par morceaux sur [a, b[, il peut arriver que *f* ne soit pas intégrable sur [a,b[, mais que la fonction $x \to \int_a^x f(t)dt$ admette une limite dans *K* au point *b* ; cette limite peut être alors notée $\int_a^{\to b} f$ (la notation $\int_a^b f$ étant inadaptée).**	**Si *f* est continue par morceaux sur [a, b] alors *f* est intégrable sur [a, b] et son intégrale définie dans ce paragraphe coïncide avec l'intégrale définie au chapitre 2. En outre, elle est intégrable sur]*a,b*],]*a,b*[et [*a,b*[et les quatre intégrales sont égales.** **En particulier, si *I* est un intervalle borné et si *f* est bornée sur *I, f* est intégrable sur *I.*** **Inégalité $\left\lvert \int_I f \right\rvert \leq \int_I \lvert f \rvert$.** **Une fonction *f* à valeurs complexes continue par morceaux sur est intégrable sur *I* si et seulement si *Ref* et *Imf* le sont ; alors,** $\int_I \overline{f} = \overline{\int_I f}$, $\int_I f = \int_I Ref + i \int_I Imf$. **Additivité de l'intégrale par rapport à l'intervalle d'intégration.** **Aucune connaissance spécifique sur les intégrales semi-convergentes n'est exigible des étudiants.**

Comparaison d'une série à une intégrale

Comparaison d'une série de nombres réels positif à une intégrale : étant donnée une fonction *f* continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ à valeurs réelles positives décroissante, la série de terme général $$w_n = \int_{n-1}^{n} f - f(n)$$ est convergente. En particulier, la série $\sum f_n$ converge si et seulement si *f* est intégrable sur $[0,+\infty[$.	La relation $w_n = \int_{n-1}^{n} f - f(n)$ permet d'encadrer w_n ; un encadrement analogue peut être obtenu lorsque *f* est croissante.
Comparaison d'une série de nombres complexes à une intégrale : étant donnée une fonction *f* de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ à valeurs complexes, telle que *f'* soit intégrable sur *I*, la série de terme général $$w_n = \int_{n-1}^{n} f - f(n)$$ est absolument convergente.	Il convient de souligner l'intérêt de l'intégration par parties pour écrire w_n sous la forme $$w_n = -\int_{n-1}^{n} (t-n+1) f'(t) dt.$$
Equivalent de *n*! (formule de Stirling).	La démonstration de la formule de Stirling n'est pas exigible des étudiants.

Convergence en moyenne, en moyenne quadratique

Les fonctions continues et intégrables sur *I* constituent un sous espace vectoriel de *C(I)* ; norme de la convergence en moyenne $N_1(f) = \int_I \lvert f \rvert$.	**Lorsque *I* est bornée, la convergence uniforme implique la convergence en moyenne et, dans ces conditions,** $$\int_I \lim_n f_n = \lim_n \int_I f_n.$$
Une fonction continue à valeurs complexes est de dite de carré intégrable sur *I* si $\lvert f \rvert^2$ **est intégrable sur *I*. Ces fonctions constituent un sous espace vectoriel de *C*(*I*) ; L'application** $(f,g) \to (f \mid g) = \int_I \overline{f} g$ **est un produit scalaire, inégalité de Cauchy-Schwarz, norme de la convergence en moyenne quadratique**	**Le produit de deux fonctions continues *f et g* de carré intégrable sur *I* est intégrable sur *I*.** **Inégalités**

$N_2(f) = \sqrt{\int_I \lvert f\rvert^2}$.	$\lvert(f\mid g)\rvert \le N_1(fg) \le N_2(f)N_2(g)$. **Continuité du produit scalaire.**

Théorème de convergence monotone, de convergence dominée

Théorème de convergence monotone : soit $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions à valeurs réelles continue par morceaux et intégrable sur *I* convergeant simplement sur *I* vers une fonction *f* continue par morceaux sur *I.* Alors *f* est intégrable sur *I* si et seulement si la suite $(\int_I f_n)_n$ est majorée. Dans ces conditions $$\int_I f = \sup_n \int_I f_n = \lim_n \int_I f_n.$$ **Application à l'intégration terme à terme d'une série de fonctions continues par morceaux et positives.**	**La démonstration de ce théorème hors programme.**
Intégration terme à terme d'une série de fonctions : soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes continues par morceaux et intégrables sur *I* telle que la série $\sum f_n$ converge simplement sur *I* et de somme continue par morceaux sur *I*. Alors si la série $\sum \int_I \lvert f_n\rvert$ converge, *f* est intégrable sur *I* et $$N_1\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) \le \sum_{n=0}^{+\infty} N_1(f_n),\quad \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$$ **Théorème de convergence dominée : soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes continues par morceaux et intégrables sur *I* et φ une fonction continue par morceaux, positive et intégrable sur *I*. Si $(f_n)_n$ converge simplement sur *I* vers une fonction *f* continue par morceaux sur *I* et si, pour tout *n*, $\lvert f_n\rvert \le \varphi$ (hypothèse de domination), alors *f* est intégrable sur *I* et**	**La démonstration de ce théorème hors programme.** **Il convient d'insister sur l'hypothèse de convergence de $\sum \int_I \lvert f_n\rvert$.**

$\int_I f = \lim_n \int_I f_n$	**La démonstration de ce théorème hors programme.** **Il convient d'insister sur l'importance de l'hypothèse de domination.**

Intégrales dépendant d'un paramètre

L'objectif est d'étendre les théorèmes de continuité et de dérivation sous le signe $\int$, déjà étudiés sur un segment, au cas d'un intervalle *I* quelconque dont l'origine et l'extrémité (éventuellement infinies) sont notées *a* et *b.* Les démonstrations de ces théorèmes sont hors programme.

Continuité sous le signe $\int$: soit *f* une application continue sur *A* $\times$ *I*, où *A* est une partie de $\mathbb{R}^m$ telle que pour tout *x* de *A*, la fonction $t \to f(x,t)$ soit intégrable sur *I* et φ une fonction continue par morceaux, positive et intégrable sur *I*. Alors si pour tout élément (x,t) de *A* $\times$ *I*, $\lvert f(x,t)\rvert \leq \varphi(t)$ (hypothèse de domination), **l'application *g* définie sur *A* par la relation** $g(x) = \int_a^b f(x,t)dt$ **est continue sur *A*.** **Dérivation sous le signe $\int$ (formule de Leibniz) : Soit *A* un intervalle de $\mathbb{R}$ et *f* est application vérifiant les**	**Extension au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment de *A*.**

hypothèses du théorème précédent et admettant une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ vérifiant elle aussi ces mêmes hypothèses. Alors *g* est de classe C^1 sur *A* et $$g'(x)=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$$ **.**	**Extension aux fonctions de classe C^k .**

1. ## Courbes d'un espace vectoriel normée de dimension finie

L'objectif de ce chapitre est double :

- **Consolider l'étude de courbes planes abordée en première année, tant du point de vue affine (étude locale et asymptotique) que métrique (abscisse curviligne, repère de Frenet, courbure). Aucune connaissance sur l'expression de la courbure en coordonnées cartésiennes et en coordonnées polaires n'est exigible des étudiants.**
- **Exploiter les résultats obtenus sur les fonctions à valeurs vectorielles pour l'étude cinématique et géométrique des courbes de l'espace. Le repère de Frenet, la courbure, et la torsion sont hors programme ; il en est de même pour la cinématique du solide dans le plan ou dans l'espace.**

La démarche du programme est de partir du point de vue cinématique (donnée d'un paramétrage) et d'introduire ensuite la notion de propriété géométrique en étudiant l'effet d'un changement de paramétrage.

Dans ce chapitre, on considère des fonctions *f* à valeur dans un espace vectoriel normé *F* de dimension inférieure ou égale à 3, de classe C^k sur un intervalle *I*, où $1 \leq k \leq +\infty$.

a. **Courbes paramétrées**

Courbes paramétrées (ou arcs paramétrés) de classe C^k . **Effet d'un changement de paramétrage, paramétrage admissible. Trajectoire d'un mouvement, orientation. Point régulier (à l'ordre 1).**	**Interprétation cinématique : mouvement, vitesse, accélération.** **Les changements d paramétrage sont supposés de classe C^k ainsi que leurs applications réciproques.**

Etude locale d'un arc orienté Γ de classe C^k

Définition des demi-tangentes en un point *A* de Γ de la tangente en un point *A*. Existence d'une tangente en un point régulier. **Dans le cas d'une courbe plane, cas d'un point *A* où l'un au moins des vecteurs dérivés successifs est non nul.**	**L'étude locale en un point où tous les vecteurs dérivés successifs sont nuls est hors programme.**

1. Travaux pratiques

Exemple d'emploi du calcul différentiel et intégral pour l'étude globale des fonctions. **$ Exemples de méthodes de calcul de valeurs approchées d'intégrales et de comparaison de leurs performances.** **Exemple d'étude d'intégrabilité d'une fonction.** **Exemple d'étude du comportement asymptotique au voisinage de $+\infty$ d'une primitive d'une fonction**	**Obtention de majoration et minoration de suites et de fonctions, recherche d'extremums, inégalités de convexité…** **La démarche consiste à subdiviser l'intervalle d'intégration e approcher, sur chaque sous intervalle, la fonction à intégrer par une fonction polynomiale.** **Il convient notamment d'exploiter l'intégration par**

continue sur $[a,+\infty[$. **Exemple d'étude d'une fonction définie comme limite d'une suite de fonctions ou comme somme d'une série de fonctions (continuité, dérivation, intégration…).** **Exemple d'étude d'une fonction définie par une intégrale dépendant d'un paramètre (transformation de Fourier, transformation de Laplace, intégrales eulériennes…).** **$ Exemples d'étude de courbes paramétrées du plan ou de l'espace et d'emploi de paramétrage d'ensemble du plan ou de l'espace définis par des conditions géométriques.** **Exemples d'étude des propriétés métriques de courbes planes (longueur d'un arc, repère de Frenet, courbure).**	**parties.** **Il convient d'exploiter les représentations intégrales pour la recherche et l'étude de solutions d'équations différentielles linéaires.** **A travers l'ensemble du programme d'analyse, il convient d'exploiter le langage de la géométrie différentielle.**

I. SERIES ENTIERES, SERIES DE FOURIER

Cette partie est organisée autour de trois objectifs :

- Approfondir l'étude des séries de nombres réels et complexes : comparaison à une intégrale.
- Etudier les propriétés élémentaires des séries entières et des séries de Fourier.
- Exploiter la représentation des fonctions par des séries entières ou des séries de Fourier pour l'étude de fonctions définies comme solution d'une équation, en relation avec l'enseignement des autres disciplines scientifiques.

1. Séries entières

L'objectif de ce chapitre est double :

- Etudier la convergence d'une série entière et les propriétés de sa somme garce au concept fondamental de rayon de convergence.
- Introduire la notion de développement d'une fonction en série de Taylor, notamment pour le développement en série entière des fonctions élémentaires.

En ce qui concerne le développement de $t \to e^{tz}$ où *t* réel et *z* complexe, il s'agit d'établir que cette fonction déjà étudier en première année, est aussi égale à $t \to \exp tz$, définie à partir de l'exponentielle d'un nombre complexe.

Les coefficients des séries entières considérées dans ce paragraphe sont réels ou complexes.

Rayon de convergence d'une série entière

Série entière $\sum a_n z^n$ d'une variable complexe z associée à une suite $(a_n)_n$ de nombres complexes : définition du rayon de convergence *R* (fini ou non). Etant donné un nombre réel $\rho > 0$ tel que $\left\|a_n \rho^n\right\|$ soit bornée alors pour tout nombre complexe z tel que $\|z\| < \rho$, $\left\|a_n z^n\right\|$ est dominé par $\left(\frac{\|z\|}{\rho}\right)^n$. La série est absolument convergente sur le disque (ouvert) de convergence. Elle est normalement convergente sur tout compact du disque de convergence ; continuité de la somme sur le disque de convergence. Rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières. Linéarité de la somme, somme du produit de Cauchy.	En dehors du cas où $\sum \|a_n\| R^n$ converge, tout énoncé général sur la convergence de la série en un point du cercle $\|z\| = R$ et sur les propriétés de la somme de la série en un tel point est hors programme Relation $\exp(z + z') = \exp(z)\exp(z')$

Série entière d'une variable réelle

Etant donné une série entière $\sum a_n t^n$ d'une variable réelle *t* dont le rayon de convergence *R* est strictement positif, une primitive de la somme *f* de cette série entière s'obtient en intégrant terme à terme. La somme *f* de cette série entière dont le rayon de convergence *R* est strictement positif est une fonction de classe C^∞ sur $]-R, R[$. En outre pour tout $k \geq 1$, $D^k f$ s'obtient par dérivation terme à terme. Définition d'une fonction développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$, où $r > 0$.	Invariance du rayon de convergence par intégration terme à terme, par dérivation terme à terme. En particulier, pour tout entier naturel *k* $a_k = \frac{1}{k!} D^k f(0)$ Développement en série de Taylor de e^{tz} où z est complexe, de $\sin t$, de $\cos t$. Développement de $\ln(1 + t)$

Définition de la série de Taylor d'une fonction *f* de classe C^∞ sur un intervalle $\left]-r,r\right[$, où $r > 0$. Définition du nombre π et construction des fonctions circulaires.	, de $(1+t)^\alpha$ où α est réel.

1. Séries de Fourier

L'objectif de ce chapitre est triple :

- Etudier les coefficients de Fourier d'une fonction *f* périodique, et notamment leur comportement asymptotique en fonction de la régularité de *f*.
- Etudier la convergence en moyenne quadratique des sommes partielles $S_p(f)$ de la série de Fourier de *f* en utilisant la structure d'espace préhilbertien.
- Etudier la convergence ponctuelle des sommes partielles $S_p(f)$

: convergence normale, théorème de Dirichlet.

Il convient d'exploiter l'interprétation en terme d'analyse harmonique des signaux périodiques.

Dans ce chapitre, toutes les fonctions considérées sont à valeurs complexes, $2\pi -$ périodiques et continue par morceaux sur **R**. Le cas des fonctions $T -$ périodiques s'y ramène par changement de variable.

a. Coefficients de Fourier

Espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes $2\pi -$ périodiques continue par morceaux sur **R**. Intégrale sur une période d'une fonction *f* à valeurs complexes $2\pi -$ périodique continue par morceaux sur **R**. Définition des coefficients de Fourier d'une telle fonction $$\hat{f}(n) = c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-\text{int}}dt$$	Définition d'une fonction $2\pi -$ périodique continue par morceaux *f* à partir d'une fonction *g* continue par morceau sur un segment de longueur 2π . Coefficients de Fourier de $\overline{f}$; cas d'une fonction à valeur réelles. Coefficients de Fourier de $t \to f(-t)$; cas d'une fonction paire , d'une fonction impaire. Effet d'une translation : coefficients de Fourier de $t \to f(t+a)$.

Expression des coefficients de Fourier sous forme de cosinus et de sinus. Pour tout entier naturel p, définition de la somme partielle : $$S_p(f)(x)=\sum_{n=-p}^{p} c_n(f)e^{inx}$$ L'application Fqui à f associe $\hat{f}$ est linéaire. La suite $\hat{f}$ est bornée et $\|\hat{f}\|_\infty \le \|f\|_1$. Coefficients de Fourier d'une dérivée : si f est $2\pi -$ périodique continue sur **R** et de classe C^1 par morceaux sur **R**, alors $c_n(Df)=inc_n(f)$ Extension au cas où f est de classe C^{k-1} sur **R** et de classe C^k par morceaux sur **R**.	Lorsqu'en un point x de **R** les sommes partielles $S_p(f)$ convergent, la série de Fourier de f est dite convergente au point x et la somme de la série de Fourier est, par définition la limite des sommes partielles $S_p(f)(x)$. Par définition $\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\|f\|$. Si f est $2\pi -$ périodique de classe C^{k-1} sur **R** et de classe C^k par morceaux sur **R**, alors $c_n(f)$est dominée, au voisinage de l'infini, par $\|n\|^{-k}$.

b.
c.
d.
e.
f.
g. **Convergence en moyenne quadratique**

Dans ce paragraphe, on considère des fonctions $2\pi -$ périodiques continues sur **R**. Il convient d'effectuer une brève extension au cas des fonctions continue par morceaux ; les démonstrations concernant cette extension ne sont pas exigibles des étudiants.

Produit scalaire $(f,g)\rightarrow(f\|g)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f(t)}g(t)dt$ sur l'espace vectoriel $C_{2\pi}$ des fonctions $2\pi -$ périodiques continue sur **R** ; Norme $f\rightarrow\|f\|_2$. La projection orthogonale d'un élément f de $C_{2\pi}$, sur le sous espace vectoriel P_p engendré par les e_n, où $\|n\|\le p$, est la somme partielle $S_p(f)$. Relation	Les fonctions $t\rightarrow e_n(t)=e^{int}$, où n parcourt **Z,** forment une famille orthonormale et, pour tout n $c_n(f)=(e_n\|f)$. En particulier, l'application qui à tout élément P de P_p associe $\|f-P\|_2$ atteint son minimum en un point et un seul, à savoir $S_p(f)$.

$$\|f\|_2^{\ 2} = \|S_p(f)\|_2^{\ 2} + d(f, P_p)^2$$ Inégalité de Bessel $\sum_{k=-p}^{p} \|c_k(f)\| \leq \|f\|_2^{\ 2}$. Convergence en moyenne quadratique : pour tout élément *f* de $C_{2\pi}$, les sommes partielles $S_p(f)$ convergent en moyenne quadratique vers *f*. L'application $f \to \hat{f}$ de $C_{2\pi}$ dans $l^2(Z)$ conserve le produit scalaire ; elle est donc injective.	La famille $(c_n(f))$, où *n* parcourt **Z**, est de carré sommable. En particulier $c_n(f)$ et $c_{-n}(f)$ tendent vers 0. Formule de Parseval : expression du carré de la norme et du produit scalaire à l'aide des coefficients de Fourier.

Convergence ponctuelle

Convergence normale : lorsque *f* est $2\pi -$ périodique continue sur **R** et de classe C^1 par morceaux sur **R**, la famille $(c_n(f))$, où *n* parcourt **Z**, est sommable. Dans ces conditions, les sommes partielles $S_p(f)$ de la série de Fourier de *f* convergent uniformément vers *f* sur **R**. Théorème de Dirichlet : si *f* est $2\pi -$ périodiques et de classe C^1 par morceaux sur **R**, alors pour tout nombre réel *x*, la série de Fourier de *f* converge en ce point, et sa somme est égale à $\frac{1}{2}\lim_{h \to 0^+}(f(x+h) + f(x-h))$. En particulier, en tout point *x* où *f* est continue, la somme de la série de Fourier de *f* est égale à *f(x).*	En particulier, pour tout nombre réel *x*, la série de Fourier de *f* converge en ce point, et sa somme est égale à *f(x).* La démonstration de ce théorème n'est pas exigible des étudiants.

1. **Travaux pratiques**

$ Pour une série de nombres réels positif, exemples d'encadrements du reste d'une série convergente, des sommes partielles d'une série divergente ; exemples de recherches de valeurs approchées de la somme d'une série convergente. $ Exemples de recherche et d'emploi de développement en séries entières ou en séries de Fourier de fonctions d'une variable réelle ; exemples d'utilisation de tels développements pour l'approximation d'une fonction.	Il convient notamment d'exploiter la comparaison d'une série à une intégrale. Il convient de mettre en valeur l'emploi de séries entières et de séries de Fourier pour la recherche de solutions d'équations différentielles.

I. EQUATIONS DIFFERENTIELLES

L'objectif de cette partie est d'étudier les systèmes différentiels linéaires et les équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2.

Il convient de relier cette étude à l'enseignement des autres disciplines scientifiques (systèmes mécaniques ou électriques gouvernés par une loi d'évolution et une condition initiale, traitement du signal). Il convient d'étudier le comportement du signal de sortie associé à différents types de signaux d'entrée et de dégager la signification de certains paramètres ou comportements : stabilité, régime permanent, oscillation, amortissement, fréquences propres, résonance. On peut alors être amené à étendre la notion de solution (fonction C^1 ou C^2 par morceaux sur)

1. Equations différentielles linéaires

L'objectif de ce chapitre est triple :

- Etudier les systèmes différentiels linéaires d'ordre 1 à coefficients constants, en relation avec la réduction des matrices.
- Etudier les équations linéaire scalaires d'ordre 1 ou 2.

a. Systèmes linéaires à coefficients constants

Définition d'une solution sur *I* de l'équation différentielle linéaire $X' = AX$, où *A* est une matrice à éléments réels ou complexes. Existence et unicité de la solution sur *I* du problème de Cauchy.	La démonstration de ce résultat est hors programme.

Equations linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2

Equation $a(t)x' + b(t)x = c(t)$ où *a*, *b*, et *c* sont continue sur *I* à valeurs dans **R** ou **C**. Equation $a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = d(t)$ où *a*, *b*, *c* et *d* sont continue sur *I* à valeurs dans **R** ou **C**. Lorsque *a* ne s'annule pas sur *I*, système d'ordre 1 associé, existence et unicité de la solution sur *I* du problème de Cauchy. Structure de l'espace des solutions de l'équation homogène, systèmes fondamentaux de solutions, wronskien. Application à la résolution de l'équation par la méthode de variation des constantes	Structure de l'espace des solutions lorsque *a* ne s'annule pas sur *I*. La démonstration de ce résultat est hors programme. Expression des solutions dans le cas où l'on connaît une solution de l'équation homogène ne s'annulant pas sur *I*.

1. **Travaux pratiques**

$ Pratique de la résolution de l'équation $X' = AX$ où *A* est une matrice à éléments réels ou complexes (par réduction à la forme diagonale ou triangulaire). Exemples d'étude de solutions d'équation différentielles linéaires d'ordre 1 ou 2.	Il convient d'étudier quelques exemples de raccordement de solutions.

I. FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES REELLES

- L'objectif de cette partie est très modeste : Consolider les acquis de première année (calcul différentiel et intégral portant sur les fonctions numériques de deux variables réelles) ; étendre brièvement ces notions aux applications continûment différentiables sur un ouvert de $\mathbf{R}^p$ et à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, où n, p = 1,2 ou 3.

1. Calcul différentiel

L'objectif essentiel est d'étudier quelques notions de base : dérivée selon un vecteur, dérivées partielle, fonctions continûment différentiables, difféomorphisme, gradient, points critiques, dérivées partielles d'ordre supérieur. En revanche, la notion de fonction différentiable est hors programme.

Les applications f considérées dans ce chapitre sont définies sur un ouvert U de $\mathbf{R}^p$ et à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, où n, p = 1,2 ou 3.

Pour l'étude d'une fonction f de plusieurs variables, il convient de mettre en valeurs le fait que la plupart des problèmes peuvent se ramener au problème correspondant pour une fonction d'une variable en paramétrant le segment $[a, a+h]$, ce qui permet d'écrire $f(a+h) - f(a) = \varphi_h(1) - \varphi_h(0)$ où, pour tout $t \in [0,1]$, $\varphi_h(t) = f(a+th)$.

a. Applications continûment différentiables

Définition de la dérivée de f en un point de U selon un vecteur h, notée $D_h f(a)$. Définition des dérivées partielles notées $D_j f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$. Définition des fonctions de classe C^1 (ou continûment	Il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que, pour tout élément $t \in [-\delta, \delta]$, $a + th$ appartienne à U. Si φ_h est dérivable à l'origine, on dit que f admet une dérivée en a selon le vecteur h, et l'on pose $D_h f(a) = \varphi'_h(0)$.

différentiables) sur U : pour tout vecteur h, $x \to D_h f(x)$ est continue sur U. Théorème fondamental : si les dérivées partielles $D_j f$ sont continues sur U, alors f admet, en tout point a de U, un développement limité à l'ordre 1, ainsi qu'une dérivée selon tout vecteur h, et $D_h f(a) = \sum_{j=1}^{p} h_j D_j f(a)$. En particulier, f est de classe C^1 sur U et l'application $h \to D_h f(a)$ est une application linéaire, appelée différentielle de f au point a et notée d$f(a)$. Si f et g sont deux applications de classe C^1, leur composée $g o f$ est l'est aussi ; différentielle de $g o f$. Définition d'un difféomorphisme. Opérations algébriques sur les applications de classe C^1. Pour une application de classe C^1, matrice jacobienne; Jacobien. Dérivée d'une fonction composée de la forme $f o \varphi$, où φ est une fonction de classe C^1 sur un intervalle I et à valeurs dans U. Caractérisation des difféomorphismes parmi les applications injectives de classe C^1.	La démonstration de ce résultat n'est pas exigible des étudiants. Caractérisation d'une application f de classe C^1 à l'aide de ses coordonnées f_i ; alors, pour tout h, les fonctions $D_h f_i$ sont les coordonnées de $D_h f$. Matrice jacobienne d'une application composée ou d'une application réciproque. Lorsque f est un difféomorphisme, l'image $f(\Gamma)$ d'une courbe paramétrée Γ régulière à l'ordre 1 est une courbe régulière à l'ordre 1 ; détermination d'une tangente à $f(\Gamma)$. La démonstration de ce résultat est hors programme.

Fonctions numériques continûment différentiables

Algèbre $C^1(U)$ des fonctions de classe C^1 sur *U*. Dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^p$, le gradient de *f* est défini par $df(a)(h) = D_h f(a) = (\mathrm{grad} f(a) \mid h)$. Points critiques d'une fonction numérique de classe C^1 ; condition nécessaire d'existence d'un extremum local.	Coordonnées du gradient.

Dérivées partielles d'ordre $k \geq 2$

Théorème de Schwarz pour une fonction de classe C^2 sur *U*. Algèbre $C^k(U)$ des fonctions de classe C^k sur *U*.	La démonstration du théorème de Schwarz est hors programme.

Coordonnées polaires

Repère polaire $(\vec{u}, \vec{v})$ du plan euclidien $\mathbf{R}^2$ défini, pour tout nombre réel θ, par : $\vec{u}(\theta) = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$ $\vec{v}(\theta) = -\sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2$ où (e_1, e_2) est la base canonique de $\mathbf{R}^2$. Coordonnées polaires d'un point de $\mathbf{R}^2$.	Relations $\frac{d\vec{u}}{d\theta} = \vec{v}$, $\frac{d\vec{v}}{d\theta} = \vec{u}$. Expression des coordonnées du gradient d'une fonction à valeur réelles *f* de classe C^1 en fonction des dérivées partielles de la fonction $(\rho, \theta) \rightarrow F(\rho, \theta) = f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$

Notions sur les courbes et surfaces

Dans ce paragraphe les courbes du plan ou de l'espace et les surfaces sont définie par un paramétrage ou par équation cartésienne. Aucune difficulté ne peut être soulevée sur l'équivalence de ces définitions.

L'objectif est double :

- Consolider les notions sur les courbes planes définies par une équation cartésienne $F(x,y)=0$ étudiée en première année : point régulier, tangente, normale.
- Etudier quelques notions sur les surfaces définies par un paramétrage ou par une équation cartésienne $F(x,y,z)=0$

.

L'étude des courbes d'une surface définies par des conditions différentielles est hors programme.

Toutes les formes du théorème des fonctions implicites utiles pour traiter ce paragraphe sont admises.

Définition d'un point régulier d'une surface définie par le paramétrage $(u,v)\to f(u,v)$, où *f* est une fonction de classe C^1 sur un ouvert *U* de $\mathbf{R}^2$ à valeurs dans $\mathbf{R}^3$. Plan tangent, normale. Tangente à l'intersection de deux surfaces en un point régulier ou les deux plans tangents sont distincts.	Définition d'un point régulier d'une surface définie par une équation cartésienne de la forme $F(x,y,z)=0$, où *F* est à valeurs réelles et de classe C^1 sur un ouvert de $\mathbf{R}^3$. Plan tangent, normale.

1. **Travaux pratiques**

Exemples d’emploi de coordonnées polaires, cylindriques ou sphériques.

Exemples de recherche d’extremums locaux ou globaux.

Exemples de recherche de solutions d’équations aux dérivées partielles.